Chapitre 2 : Analyse des signaux périodiques

Contents

1 Introduction

La théorie des signaux repose sur l'analyse harmonique ou fréquentielle. Cette analyse se fait par le devéloppement en série de Fourier et plus généralement par la transformation de Fourier pour obtenir une représentation spectrale des signaux déterministes. c'est à dire la répartition de l'amplitude, de la phase, de l'energie ou de la puissance des signaux.

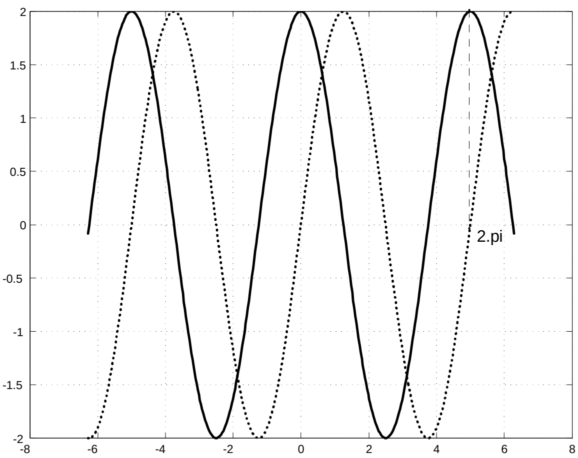
2 Représentation d'un signal

On décrit un signal suivant deux bases : le temps et la fréquence.
Exemple: une grandeur sinusoidale

$$x(t) = A.\cos(2.\pi.f_0.t + \alpha)$$

Le signal ondule avec une forme précise fixée par la fonction cos; A l'amplitude, f0 la fréquence et α la phase(ces informations sont fournies par la représentation spectrale). Exemple:

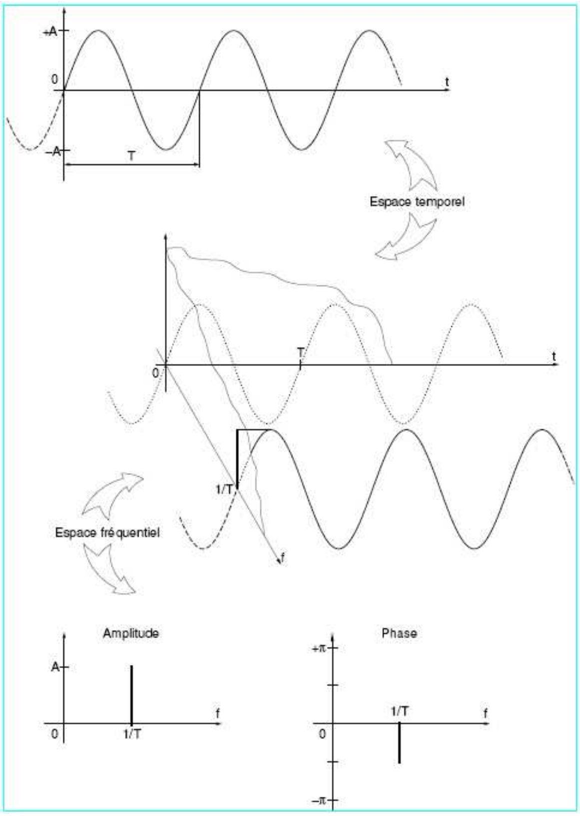
$$x_1(t) = 2.cos(0,4.\pi.t - \frac{\pi}{2}) \rightarrow f_0 = 2et\alpha = -\frac{\pi}{2}$$



Comme le temps et la fréquence sont les deux composantes de la description d'un même signal, une sinusoïde devrait être représentée dans un espace à trois dimensions

=> Cette représentation est mal pratique et est remplacée par ses projections sur les plans temporel et fréquentiel.

Dans la projection sur l'axe du temps, on retrouve le dessin bien connu d'une sinusoïde, alors que la projection sur l'axe des fréquences conduit à une raie située en f = f0 et de hauteur A. Comme cette projection ne fournit que l'amplitude A, il est nécessaire, pour la fréquence considérée, de donner également la phase. Ces deux diagrammes portent le nom de spectres d'amplitudes et de phases.



3 Les séries de Fourier

Toute fonction périodique de période T, peut être décomposée en une somme infinie (série) de fonctions sinusoïdales dont les fréquences sont des multiples de la fréquence fondamentale $f_0 = \frac{1}{T}$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi f_0 k t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi f_0 k t)$$

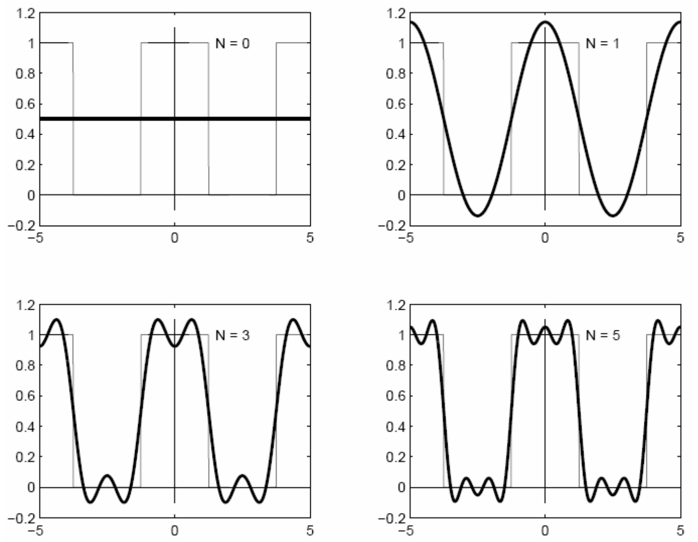
$f_0 = \frac{1}{T}$: fréquence fondamentale du signal
$\frac{a_0}{2}$: valeur moyenne ou composante continu
a_k, b_k : sont les coefficients de Fourier du développement en cosinus et sinus

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t).\cos(2\pi f_0 k t)dt \qquad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t).\sin(2\pi f_0 k t)dt \qquad k \geq 1$$

$h_k(t) = a_k.\cos(2\pi f_0 k t) + b_k.\sin(2\pi f_0 k t)$ est l'harmonique de rang k du signal

Exemple :



$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi f_0 k t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi f_0 k t)$$

3.1 Série de Fourier en cosinus

En prenant en compte la relation trigonométrique :

$$A\cos(x) + B\sin(x) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x + \arctan(\frac{-B}{A}))$$

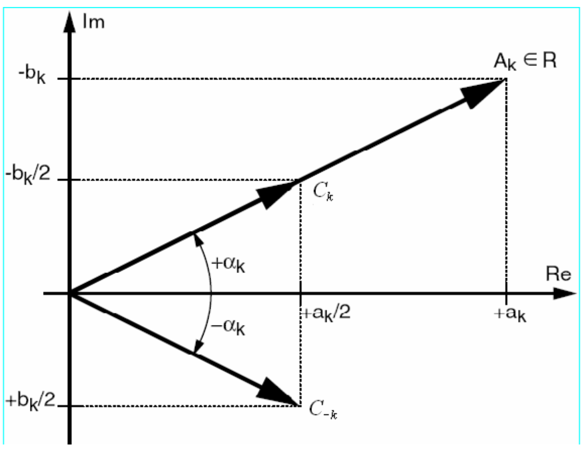
le développement en série de Fourier peut s'écrire :

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi f_0 k t + \alpha_k)$$

$$\text{avec } A_0 = \frac{a_0}{2} \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \alpha_k = \arctan(\frac{-b_k}{a_k})$$

Le développement en série en cosinus revient à considérer que le signal x (t) est créé de manière équivalente par une infinité de générateurs sinusoïdaux

La représentation spectrale qui lui est associée porte le nom de spectre unilatéral



La figure nous permet de voir les relations simples qui lient les trois représentation spectrales (cos+sin, en cosinus, et complexe)

Dans le cas des spectres bilatéraux, on notera que les spectres d'amplitudes sont toujours des fonctions paires car on a :

$$\| C_k \|=\| C_{-k} \|= \frac{A_k}{2} \; k \neq 0$$

alors que les spectres de phases sont toujours des fonctions impaires. On a en effet :

$$\Psi(C_k) = -\Psi(C_{-k}) = \alpha_k \qquad k \neq 0$$

3.2 Série de Fourier complexe

En utilisant les relations d'Euler:

$$\cos(x) = \frac{\exp(+ix) + \exp(-ix)}{2} \quad et \quad \sin(x) = \frac{\exp(+ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

on montre aisément que la série de Fourier peut être transformée en une série de Fourier complexe :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k . \exp(i2\pi f_0 kt)$$

avec:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \exp(-i2\pi f_0 kt) dt \quad -\infty \leq k \leq +\infty$$

C_k: coefficient complexe de la série de Fourier

La représentation graphique spectrale qui lui est associée porte le nom de spectre bilatéral.
En fait les coefficients de Fourier minimisent l'écart quadratique entre la fonction $s(t)$ et le développement en série de Fourier. En effet, la valeur C_k est obtenue en dérivant par rapport au coefficient d'indice n l'expression :

$$\int_0^T (s(t) - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{i2\pi m t f_0})^2 dt$$

et en annulant cette dérivée.

Les coefficients complexes C_k sont reliés aux coefficients $a_k$et b_k par les relations suivantes :

$$C_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$

$$C_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

ce qui nous donne

$$a_k = C_k + C_{-k}$$

$$b_k = i(C_k - C_{-k})$$

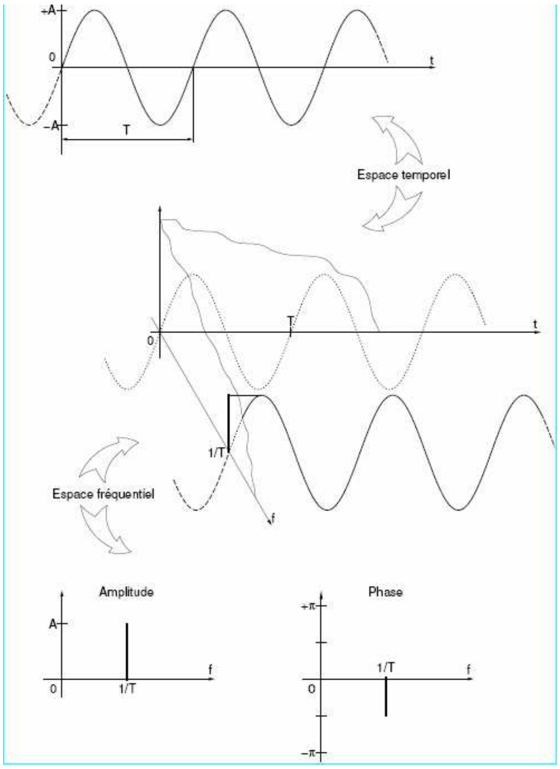
3.3 Spectre d'amplitude et de phases

Une grandeur sinusoidale est décrite par l'équation :

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 kt + \alpha)$$

Son évolution temporelle est contenue dans le mot *cos* ; dès lors, on sait que le signal $x(t)$ ondule avec une forme précise fixée par la fonction cosinus. Cependant, des informations supplémentaires sont données : l'amplitude A, la phase α et la fréquence f_0. Ce sont ces informations qui sont fournies par la représentation fréquentielle ou spectrale.

Deux représentations : temporelle et fréquentielle



La projection sur l'axe du temps fournit le dessin bien connu d'une sinusoïde, la projection sur l'axe des fréquences conduit à une raie située en $f = f_0$ et de hauteur A. cette projection ne fournit que l'amplitude A, il est nécessaire, pour la fréquence considérée, de donner également la phase α.Ces deux diagrammes portent le nom de spectres d'amplitudes et de phases.

D'une manière générale un spectre est une représentation numérique et /ou graphique des coefficients de Fourier en fonction des fréquences. Lorsque les coefficients de Fourier sont des nombres complexes, on se limite souvent à la représentation de leurs modules.

3.4 Propriétés des séries de Fourier

3.4.1 Fonction paire

Si la fonction $x(t)$ est paire (symétrie miroir d'axe vertical) i.e si la relation $x(t) = x(-t)$ est vérifiée, on montre facilement que tous les coefficients b_k sont nuls.

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{+\frac{T}{2}} x(t).\cos(2\pi f_0 kt)dt$$

3.4.2 Fonction impaire

Si la fonction est impaire (l'origine est un centre de symétrie) ie si la relation $x(t) = -x(-t)$ est vérifiée, tous les coefficients a_k sont nuls et

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{+\frac{T}{2}} x(t).\sin(2\pi f_0 kt)dt$$

3.5 Convergence d'une série de Fourier. Conditions de Dirichlet :

Theorem 1 *Théorème*

Supposons que x soit dérivable par morceaux et périodique. Alors la série de Fourier avec les coefficients converge vers

$x(t)$ si t est un point de continuité.
$\frac{1}{2}\left[x(t_+) + x(t_-)\right]$ si t est un point de discontinuité.

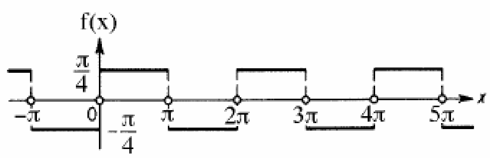
Ceci signifie que, pour chaque t entre $-T$ et T, la série de Fourier converge vers la moyenne de la limite à gauche et de la limite à droite de $x(t)$ en t. Si x est continue en t, alors la limite à gauche et à droite sont toutes deux égales à $x(t)$, et la série de Fourier converge vers $x(t)$. Si x a un saut de discontinuité en t alors la série de Fourier converge vers le point au milieu de la discontinuité en ce point.

Exemple :

Calculer le développement en série de Fourier de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\pi}{4} si\ 2.n.\pi < x < (2.n+1).\pi$$

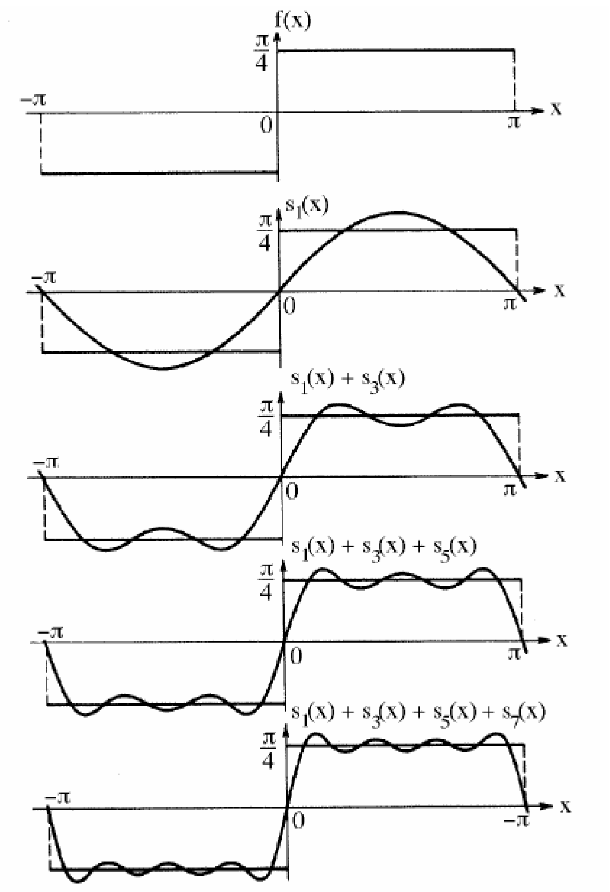
$$f(x) = -\frac{\pi}{4} si\ (2.n-1).\pi < x < 2.n.\pi$$



la fonction est impaire et par conséquent tous les coefficients a_n sont nuls.

$$b_n = \left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\cdot\int_0^{\pi}\sin nx dx = \left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{\pi n}\right)\cdot\left[1-(-1)^n\right]$$

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots = s_1(x) + s_3(x) + s_5(x) + \ldots$$



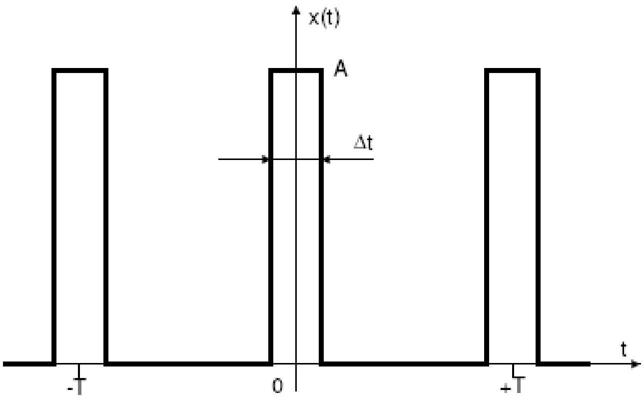
On observe, bien, dans la figure ci-dessus que la série converge vers f(x).

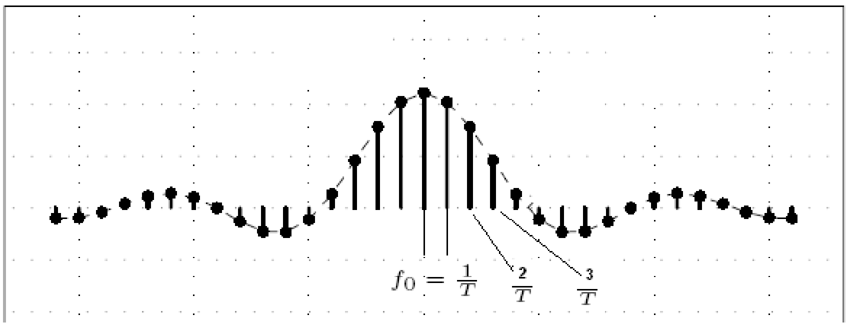
On vérifie aussi que la valeur de la série aux points de discontinuité est bien égale à zéro (ce qui est logique, la moyenne arithmétique de π/4 et - π/4 étant zéro)

Remarque

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi f_0 k t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi f_0 k t)$$

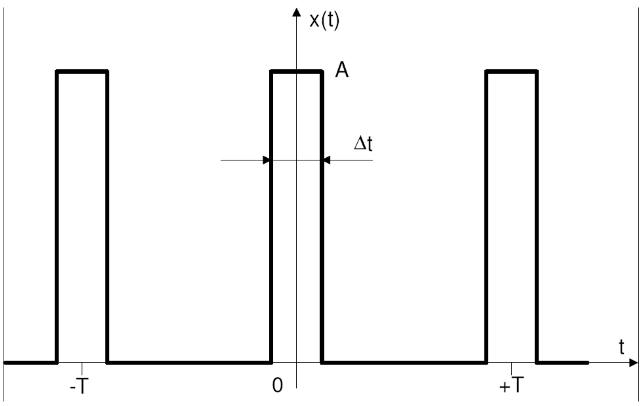
Les signaux élémentaires qui résultent de la décomposition d'un signal périodique ont des fréquences qui sont des multiple entiers de $f_0 = \frac{1}{T}$, l'inverse de la période; ils couvrent un ensemble discret de l'espace des fréquences.





4 Suite d'impulsions

4.1 Suite d'impulsions rectangulaires (SIR)



Les coefficients complexes de la série de Fourier complexe de la SIR sont donnés par:

$$X(i.k) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \exp(-i2\pi f_0 kt) dt \qquad \text{avec} \qquad f_0 = \frac{1}{T}$$

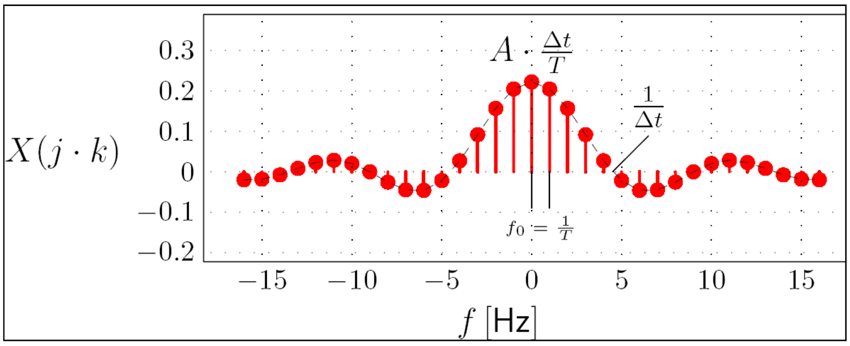
D'après la définition, on a :

$$X(i.k) = \frac{A}{T} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} 1. \exp(-i2\pi f_0 kt) dt$$

$$\frac{A}{T}.\frac{-1}{j.2.\pi.k.f_0}.(e^{-i2\pi f_0 k\frac{\Delta t}{2}} - e^{+i2\pi f_0 k\frac{\Delta t}{2}})$$

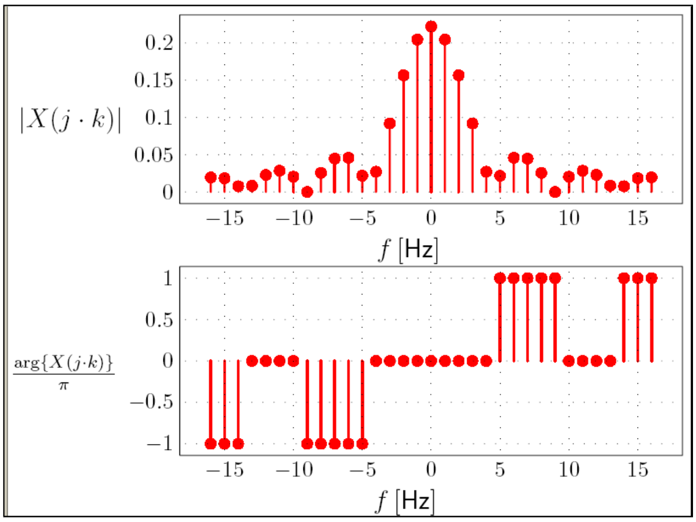
$$X(i.k) = A.\frac{\Delta t}{2}.\frac{\sin(k\pi f_0\Delta t)}{k\pi f_0\Delta t}$$

Les coefficients de Fourier sont purement réels puisque le signal est pair. Leur enveloppe est une fonction en $\frac{sin(x)}{x}$ qui porte le nom de *sinus cardinal*



plus les impulsions sont étroites par rapport à la période T, plus le spectre s'étale. En effet, le premier passage par zéro se fait à la fréquence $\frac{1}{\Delta t}$. Par contre, la distance entre raies spectrales ne change pas puisqu'elle est égale à l'inverse de la période de la SIR $f_0 = \frac{1}{T}$

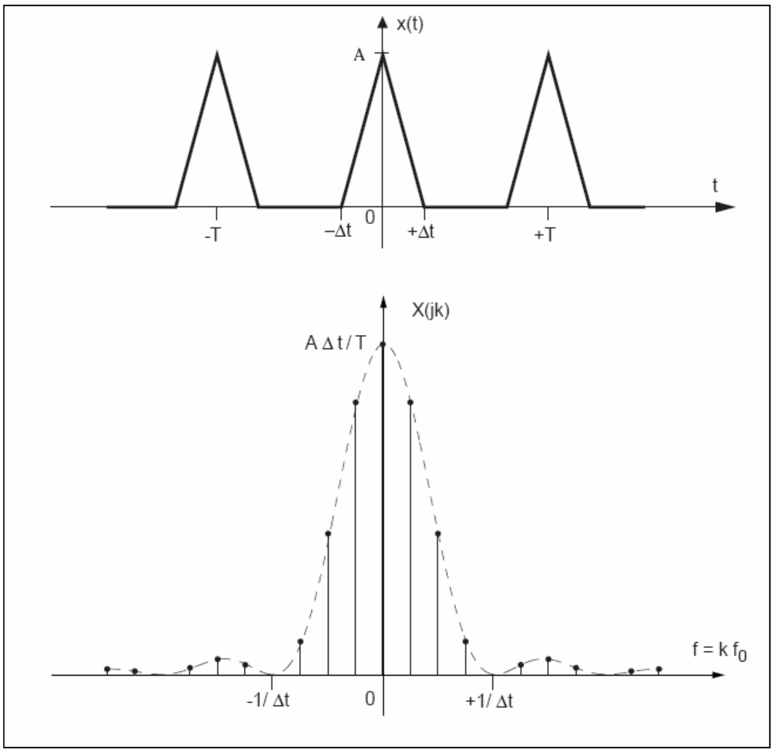
Comme le spectre d'un signal est souvent complexe, sa présentation dans un plan ne peut se faire qu'au travers du traçage distinct des spectres d'amplitudes et de phases.



4.2 Suite d'impulsion triangulaires (SIT)

Le signal $x(t)$ et son spectre $X(i{\cdot}k)$ sont représentés à la figure suivante : L'expression de X (j · k) est alors la suivante :

$$X(i.k) = A.\frac{\Delta t}{2}.(\frac{\sin(k\pi f_0\Delta t)}{k\pi f_0\Delta t})^2$$



4.3 Suite d'exponentielles décroissantes

On considère une exponentielle qui se répète périodiquement aux instants $k.T$:

$$x(t) = A.e^{\frac{-t}{\tau}} \quad si \;\; 0 \leq t < T$$

calcul de spectre:

$$X(i.k) = \frac{1}{T}.\int_0^T x(t).e^{-i2\pi f_0 kt}.dt$$

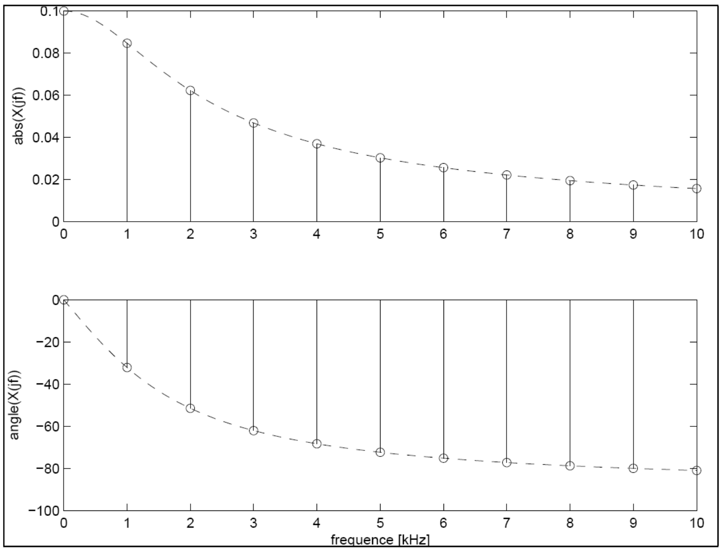
$$X(i.k) \;\; = \frac{A}{T}.\int_0^T e^{\frac{-t}{\tau}}.e^{-i2\pi f_0 kt}.dt$$

$$X(i.k) \quad = \frac{A}{T}.\int_0^T e^{\frac{-t}{\tau}}.e^{-t.(\frac{1}{\tau}+i2\pi f_0 kt)}.dt$$

$$X(i.k) \;\; = \frac{A}{T}.\frac{e^{-t.(\frac{1}{\tau}+i2\pi f_0 kt)}}{-(\frac{1}{\tau}+i2\pi f_0 kt)} \;|$$

$$X(i.k) \;\; = \frac{A}{T}.\frac{-\tau}{(1+i2\pi f_0 k.\tau)}.[e^{-t.(\frac{T}{\tau}+i2\pi f_0 kT)} - 1]$$

$$\text{pour} \quad \tau \lll T \qquad X(i.k) = A.\frac{\tau}{T}.\frac{1}{(1+i2\pi f_0 k.\tau)}$$



5 Reconstruction des signaux

5.1 Synthèse d'un signal carré

On sait que l'expression de la série de Fourier complexe est donnée par:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(j.k).e^{i2\pi f_0 kt}$$

et on sait que dans le cas d'une suite d'impulsions rectangulaire on a:

$$X(i.k) = A.\frac{\Delta t}{2}.\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t}$$

Connaissant le spectre $X(ik)$, on peut toujours reconstruire une approximation d'ordre N du signal temporel.

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} X(j.k).e^{i2\pi f_0 kt}$$

$$x_N(t) = A.\frac{\Delta t}{2} \sum_{k=-N}^{+N} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t}.e^{i2\pi f_0 kt}$$

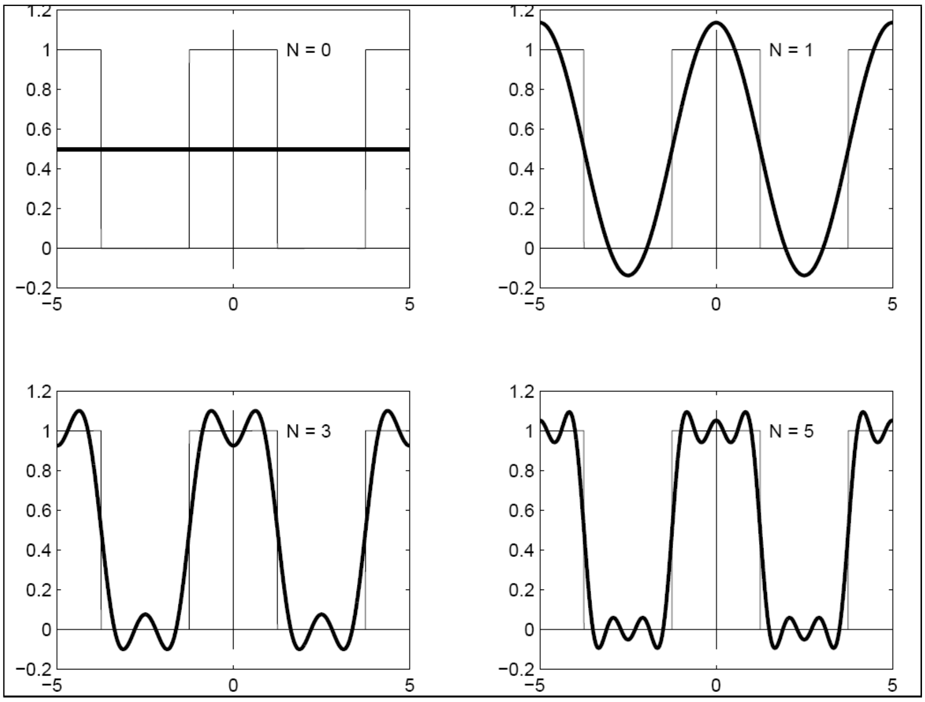
$$x_N(t) = A.\frac{\Delta t}{2}(\sum_{k=-N}^{-1} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t}.e^{i2\pi f_0 kt} \ + \sum_{k=0}^{+N} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t}.e^{i2\pi f_0 kt} \ )$$

$$x_N(t) = A.\frac{\Delta t}{2}(1 + 2\sum_{k=1}^{+N} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t}. \cos 2\pi f_0 kt \ )$$

Dans le cas d'un signal carré on $\Delta t = \frac{T}{2}$ donc $\frac{\Delta t}{T} = 0.5$ et le sinus cardinal s'annule pour k pair.

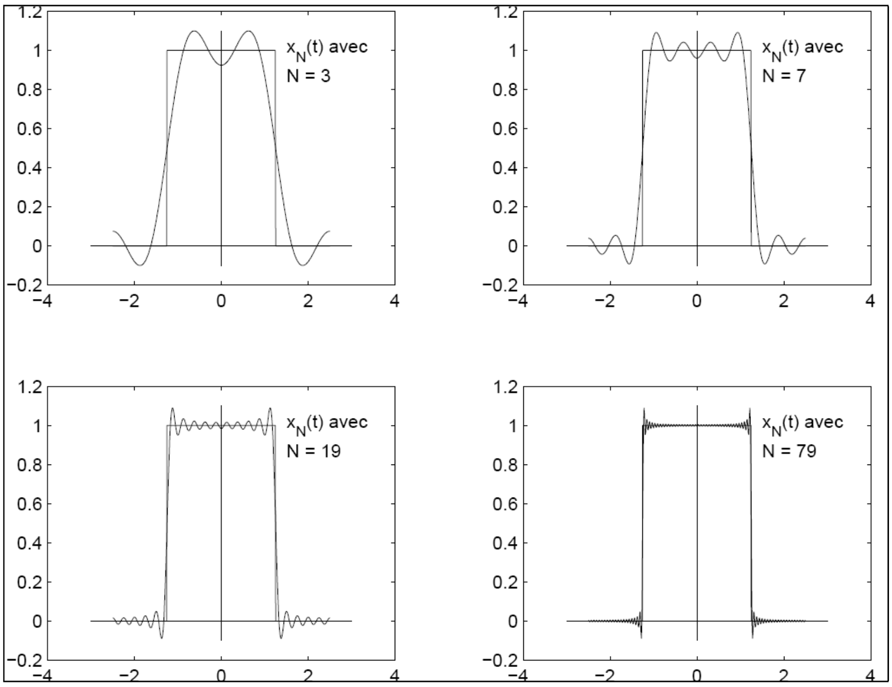
Si $A = 1$, on obtient :

$$x_N(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}.\cos(2\pi f_0 t) - \frac{2}{3.\pi}.\cos(6\pi f_0 t) + \frac{2}{5.\pi}.\cos(10.\pi.f_0 t) + ...$$



5.2 Phénomène de Gibbs

En général, lorsqu'on reconstruit un signal $x(t)$ à partir de ses coefficients de Fourier, on remarque une convergence rapide vers le signal original au fur et à mesure que N augmente. Cependant, cela n'est plus vrai lorsque le signal possède des discontinuités d'ordre 0. Il apparaît alors, à l'endroit de la discontinuité, des oscillations que l'on désigne sous le nom de phénomène de Gibbs.



6 Energie et formule de Parseval d'un signal

La puissance moyenne d'un signal T périodique x, est la quantité (lorsqu'elle est finie)

$$E(x) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mid x(t) \mid^2 dt$$

Appelée aussi le carré de la valeur efficace de x sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$. La puissance fournie par une harmonique de rang $p \geq 1$, sur un intervalle de longueur T, se calcule par :

$$E_p = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mid a_p \cos(pwt) + b_p \sin(pwt) \mid^2 dt$$

$$E_p = \frac{b_p^2 + a_p^2}{2}$$

En sommant toutes les puissances des harmoniques de la série de Fourier d'un signal périodique x (supposée convergente) on obtient la formule dite de Parseval.

$$a_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p^2 + a_p^2}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mid x(t) \mid^2 dt$$

L'énergie moyenne associée à une fonction périodique est égale à la somme des énergies moyennes associées à chacune de ses composantes de Fourier. On dit aussi qu'il ya conservation de la puissance :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \mid C_p \mid^2 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mid x(t) \mid^2 dt$$

7 Décalage temporel

Il est fréquent en analyse des signaux de devoir décaler temporellement un signal $x(t)$; on obtient alors un nouveau signal $y(t) = x(t + t_d)$. Ce décalage t_d peut être positif (signal avancé) ou négatif (signal retardé). On montre alors qu'entre les espaces temps et fréquences, il existe la relation suivante :

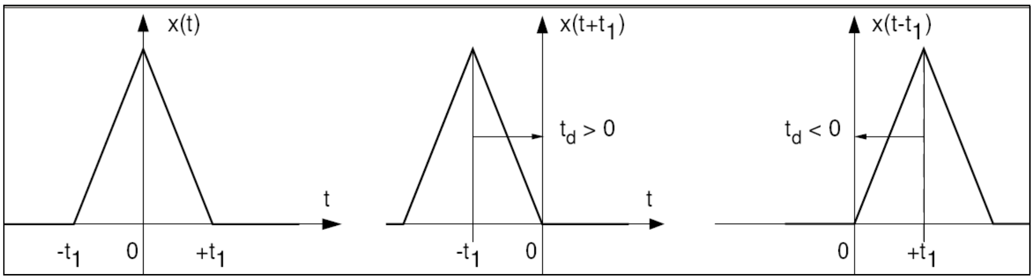
$$y(t) = x(t + t_d) \Longleftrightarrow Y(i.k) = e^{+i2\pi f_0 k t_d} .X(i.k)$$

en module ça donne :

$$\mid Y(i.k) \mid = \mid X(i.k) \mid$$

en phase ça donne :

$$\beta_k = \alpha_k + 2.\pi.k.f_0.t_d$$



8 Modulation d'amplitude

$$x(t) = m(t).p(t)$$

si $p(t)$ est une fonction sinusoidale, on peut la remplacer par deux phaseurs de fréquence $\pm f_p$ grâce aus formules d'Euler:

$$cos(2.\pi.k.f_p.t) = \frac{e^{+i2.\pi.f_p.t} + e^{-i2.\pi.f_p.t}}{2}$$

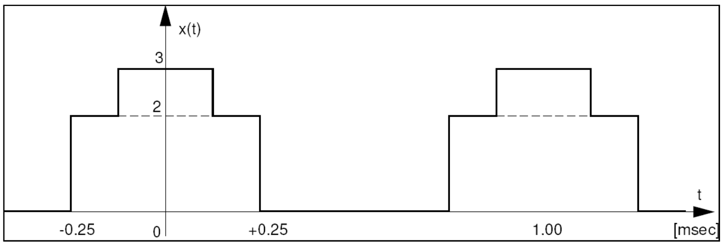
On montre facilement alors que :

$$x(t) = e^{\pm i2.\pi.f_p.t}.m(t) \iff X(i.k) = M(i(k.f_0 \pm f_p))$$

À une multiplication par un phaseur dans le domaine temporel correspond un décalage dans l'espace des fréquences

9 Calcul de quelques spectres

9.1 Suite d'impulsions composites



On considère le signal de la figure suivante. calculer ses composantes spectrales et obtenir son approximation d'ordre 3. Le signal $x(t)$ est composé d'une somme de deux SIR $x1(t)$ et $x2(t)$ dont les caractéristiques sont, respectivement,

- leur largeur $t1 = 0.25$ [ms], $t2 = 0.5$ [ms]
- leur amplitude $A1 = 1$ [V], $A2 = 2$ [V].

Utilisant la propriété de linéarité des séries de Fourier, on a :

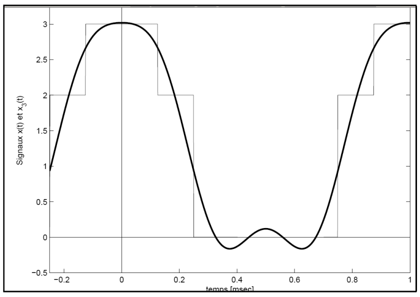
$$x(t) = x1(t) + x2(t) \iff X(i.k) = X_1(i{\cdot}k) + X_2(i{\cdot}k)$$

$$X_1(i{\cdot}k) = A1.\frac{\Delta t_1}{T}\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t_1)}{k\pi f_0 \Delta t_1} = 0.25.\frac{\sin(k.\frac{\pi}{4})}{k.\frac{\pi}{4}}$$

$$X_2(i{\cdot}k) = A2.\frac{\Delta t_2}{T}\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t_2)}{k\pi f_0 \Delta t_2} = 1.0.\frac{\sin(k.\frac{\pi}{2})}{k.\frac{\pi}{2}}$$

$$X(i.k) = X_1(i{\cdot}k) + X_2(i{\cdot}k) = 0.25.\frac{\sin(k.\frac{\pi}{4})}{k.\frac{\pi}{4}} + 1.0.\frac{\sin(k.\frac{\pi}{2})}{k.\frac{\pi}{2}}$$

$$x(t) = 1.25 + 1.724.cos(2.\pi.f_0.t) + 0.318.cos(4.\pi.f_0.t) + 0.274.cos(6.\pi.f_0.t + \pi)$$



9.2 SIR décalée

Cas d'une SIR non centrée démarrant à l'instant t = 0, de largeur t et de période T. la SIR est retardée d'une demi-largeur d'impulsion et le temps de décalage vaut donc $t_d = \frac{-\Delta t}{2}$.

En partant d'une SIR centrée et utilisant le théorème du retard, on obtient :

$$\underbrace{X(i.k)} = \underbrace{A.\frac{\Delta t}{T}}_{X_0} . \underbrace{\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t}}_{X1(ik)} . \underbrace{e^{-i2\pi f_0 k.\frac{\Delta t}{2}}}_{X2(j.k)}$$

$$\mid X(i.k) \mid = \mid X_0 \mid . \mid X_1 \mid . \mid X_2 \mid$$

$$\mid X(i.k) \mid = A.\frac{\Delta t}{T}. \mid \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \mid .1$$